ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, 19/6/2014, διδάσκων Α. Τόλιας

Θέμα 1. [1μ]
Να δοθεί ο ορισμός του χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και να αποδειχθεί ότι για κάθε ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Θέμα 2. [2μ]
α) Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου. Στη συνέχεια να ορίσετε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* στο $\mathbb{R}$ και να αποδείξετε ότι είναι πράγματι εξωτερικό μέτρο. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda^*(\{x\}) = 0$.
β) Έστω $A \subset R$ και $c \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $B = \{x \in A : x > c\}$ και $\Gamma = \{x \in A : x < c\}$. Να δειχθεί ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) + \lambda^*(\Gamma)$.

Θέμα 3. [1.5μ]
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου, $A \in \mathcal{A}$ και $B \subset X$ ώστε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$. Να δείξετε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$. [Υπενθύμιση: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$].

Θέμα 4. [2μ]
Έστω $a < \beta$ και $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το σύνολο $G = \{(x, f(x)) : x \in [a, \beta]\}$ έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$. [Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.]

Θέμα 5. [2μ]
α) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}-$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $\phi : R \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι η $\phi \circ f$ είναι $\mathcal{A}-$ μετρήσιμη.
β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση ώστε για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ να ισχύει $[f \leq q] \in \mathcal{A}$. Να δειχθεί ότι η f είναι $\mathcal{A}-$ μετρήσιμη.

Θέμα 6. [2μ]
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, N ένας φυσικός αριθμός και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων. Ορίζουμε E να είναι το σύνολο των στοιχείων του X που ανήκουν σε τουλάχιστον N από τα σύνολα $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Να δειχθεί ότι το σύνολο E είναι μετρήσιμο και ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq N \cdot \mu(E)$.

[Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.]

Θέμα 7. [2.5μ]
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.
α) Να δειχθεί ότι για κάθε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty]$, η συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ από τον τύπο $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ είναι μέτρο.
β) Να δειχθεί ότι για f όπως στο α) και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\nu(A) = 0$.
γ) Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες και $f = g$ $\mu-$σχεδόν παντού δείξτε ότι $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.
δ) Αν $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη και $\int f \, d\mu = 0$ να αποδείξετε ότι $f = 0$ $\mu-$σχεδόν παντού.

Καλή Επιτυχία!